Varianta 61

SUBIECTUL I

a) AC=10.
b) $S_{ABCD} = 48$.
c) $tg\left(B\hat{A}C\right)=\frac{3}{4}$.
d) Distanța de la O la dreapta AB este 3.
e) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.
f) $b=-1,\ a=-\frac{4}{3}$.

SUBIECTUL II

1.
a) $\det(A)=-11$.
b) Numerele sunt: 0, 1, 2, 3.
c) $x=16$.
d) Restul este 7.
e) $f^{-1}(5)=1$.

2.
a) $f'(x)=\frac{1}{x};\ x>0$.
b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$.
c) Deoarece $f'(x)>0, \forall x>0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe (0, ∞).
d) Deoarece f este strict crescătoare pe [1, ∞) și $f(1)=0$ atunci
$f(x) > f(1)=0\ \forall x>1$.
e) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx. = \frac{\ln^2 2}{2}$.

SUBIECTUL III

a) $x_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1\pm i\right)$.
b) $\overline{x_2}=x_1$.
c) $x_1+x_2=\sqrt{2}$; $x_1^2=i$; $x_2^2=-i; \Rightarrow x_1^2+x_2^2=0$
d) Folosind **c)** avem că $x_1^4=-1$ și $x_2^4=-1$.

e) $x_1^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)$; $x_2^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-i-1)$ deci $x_1^3 + x_2^3 = -\sqrt{2}$.

f) $x_1^{2007} + x_2^{2007} = \left(x_1^4\right)^{501} \cdot x_1^3 + \left(x_2^4\right)^{501} \cdot x_2^3 \overset{d)}{=} \sqrt{2}$.

g) Deoarece $x_1 + x_2 = \sqrt{2}$, $x_1^2 + x_2^2 = 0$, $x_1^3 + x_2^3 = -\sqrt{2}$, $x_1^4 + x_2^4 = -2$, atunci șirul conține cel puțin patru elemente diferite.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x + \frac{4}{x}\right) = \infty$, rezultă că funcția nu are asimptotă orizontală.

Căutăm asimptotă oblică: $y = mx + n$ unde: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) = 1$ şi

$n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{x} = 0$. Rezultă că dreapta $y = x$ este asimptotă oblică spre +∞.

c) $f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2} > 0,\ \forall x \in (2,\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe [2, ∞).

d) Ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x_1 = -2$ și $x_2 = 2$. Cum $f'(x) \geq 0, x \in (-\infty,-2] \cup [2,\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,-2]$ şi crescătoare pe $[2,\infty)$; $f'(x) \leq 0, x \in [-2,0) \cup (0,2] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-2,0)$ şi descrescătoare pe $(0,2]$. Deci punctele de extrem sunt $x_1 = -2$ și $x_2 = 2$.

e) Dacă $x \geq 2$ atunci: $f(x) \geq 4 \Leftrightarrow x + \frac{4}{x} \geq 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0\ (A)$.

f) Folosind **e)** şi integrând obținem $\int_2^4 f(x)dx \geq \int_2^4 4dx = 8$.

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(n)}{n}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{4}{n^2}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{4}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{4}\cdot 4} = e^4$.